Erdölreserven

1 Aufgabenstellung

Auf der Welt gibt es Stand heute 217 Mrd Tonnen Erdölreserven. Im ersten Jahr werden 4 Mrd Tonnen verbraucht. In jedem weiteren Jahr steigert sich der Verbrauch um 2 %. Wann sind alle Vorräte verbraucht?

2 Analytische Lösung

Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass der Erdölverbrauch diskrete Werte annimmt. Das heißt, er liegt im ersten Jahr konstant bei $4 \cdot 10^9\,\mathrm{t/a}$ und steigt dann sprunghaft um 2 % auf $102\,\% \cdot 4 \cdot 10^9\,\mathrm{t/a} \approx 4{,}08 \cdot 10^9\,\mathrm{t/a}$ an.

Die Erdölreserven $f(T)$ in 10^9 t lassen sich somit durch

$$f(T) = 217 \underbrace{- 4 \cdot 1{,}02^0 - 4 \cdot 1{,}02^1 - \cdots}_{T\text{-mal}} \tag{1}$$

$$= 217 - \sum_{t=0}^{T-1} 4 \cdot 1{,}02^t \qquad \forall\, T \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \tag{2}$$

berechnen. Um den Zeitpunkt T zu bestimmen, an dem die Vorräte aufgebraucht sind, setzten wir den Ausdruck gleich Null und erhalten

$$217 - \sum_{t=0}^{T-1} 4 \cdot 1{,}02^t \stackrel{!}{=} 0 \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{t=0}^{T-1} 1{,}02^t = \frac{217}{4} \tag{4}$$

Unter Verwendung der Geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \forall\, q \neq 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \tag{5}$$

mit $q \equiv 1{,}02$, $k \equiv t$ und $n \equiv T - 1$ lässt sich die Summe umformen zu

$$\Rightarrow \qquad \frac{1 - 1{,}02^T}{1 - 1{,}02} = \frac{217}{4} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1{,}02^T = \frac{217}{4} \cdot 0{,}02 + 1 \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \qquad T = \log_{1{,}02}\left(\frac{217}{4} \cdot 0{,}02 + 1\right) \approx 37 \tag{8}$$

Die Erdölreserven sind also nach etwas mehr als 37 Jahren verbraucht.

3 Numerische Lösung

Mithilfe des folgenden `Python`-Codes ergeben sich die in Tabelle 1 eingetragenen Werte.

```
time = 0
reserve = 217
change = 4

while reserve > 0:
    print(time, reserve, change)
    reserve -= change
    change *= 1.02
    time += 1
```

Tabelle 1: Numerisch mittels `Python` berechnete Erdölreserven f und jährliche Erdölverbräuche v in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit T. Die Werte der letzten beiden Spalten wurden auf zwei Nachkommastellen gerundet.

T in a	f in 10^9 t	v in 10^9 t/a
0	217,00	4,00
1	213,00	4,08
2	208,92	4,16
3	204,76	4,24
4	200,51	4,33
5	196,18	4,42
⋮	⋮	⋮
35	17,02	8,00
36	9,02	8,16
37	0,86	8,32
38	−7,46	8,49

Das letzte vollständig vergehende Jahr mit positivem f ist das 37-ste; im Laufe des Folgejahres gehen die Reserven zur Neige.